

Kategórie bez objektov

Diplomová práca

Vedúci: prof. Stanislav Krajčí, PhD. **Autor:** Lukáš Sekerák

Prírodovedecká fakulta UPJŠ

15. január 2025

- je odvetvie abstraktnej algebry
- zaoberá skúmaním matematických štruktúr a vzťahov medzi nimi
- základy položili v 40. rokoch 20. stor. Samuel Eilenberg a Saunders Mac Lane
- má celý rad aplikácií v algebraickej geometrii, logike, lingvistike, teoretickej informatike
- často odhaľuje zaujímavé súvislosti medzi rôznymi odvetviami matematiky

Čo sú kategórie?

Kategória

Nech O je trieda, M je trieda, b je (triedové) zobrazenie $b : M \rightarrow O$, e je (triedové) zobrazenie $e : M \rightarrow O$, $\circ$ je zobrazenie z podmnožiny množiny $M \times M$ do množiny M a nech u je zobrazenie $u : O \rightarrow M$, pre ktoré platia nasledujúce podmienky:

1. $(\forall m_1, m_2 \in M) [m_1, m_2] \in \text{Dom}(\circ) \Leftrightarrow e(m_1) = b(m_2)$,
2. $(\forall m_1, m_2, m_3 \in M) ([m_1, m_2] \in \text{Dom}(\circ) \wedge [m_2, m_3] \in \text{Dom}(\circ)) \Rightarrow (m_1 \circ m_2) \circ m_3 = m_1 \circ (m_2 \circ m_3)$,
3. $(\forall o \in O) b(u(o)) = o$,
4. $(\forall o \in O) e(u(o)) = o$,
5. $(\forall m \in M) u(b(m)) \circ m = m$,
6. $(\forall m \in M) m \circ u(e(m)) = m$.

Čo sú kategórie?

Kategória

Potom šesticu $(O, M, b, e, \circ, u)$ nazývame **kategóriou**.

Prvky množiny O nazývame **objekty**.

prvky množiny M **morfizmy**.

Objekt $b(m)$ **počiatok morfizmu** m .

Objekt $e(m)$ **koniec morfizmu** m .

Morfizmus $m_1 \circ m_2$ **zloženie morfizmov** m_1, m_2 .

Morfizmus $u(o)$ nazývame **jednotkový morfizmus** príslušný danému objektu o .

Čo sú kategórie?

Zjednodušene povedané, kategórie pozostávajú z:

- **objektov**
- **morfizmov**

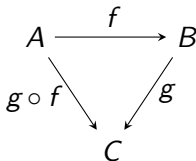
Kategórie je možné zobrazit' aj v podobe diagramov: body a šípky medzi týmito bodmi. Diagram je vlastne súbor objektov v kategórii (body) spolu so súborom morfizmov medzi týmito objektami (šípky).

Príklady kategórií

Príklad

Set je kategória, ktorej objektami sú množiny a morfizmami zobrazenia medzi množinami. Skladanie morfizmov je klasické skladanie zobrazení. Teda ak $f: A \rightarrow B$ a $g: B \rightarrow C$ potom $g \circ f: A \rightarrow C$ je zobrazenie, pre ktoré platí: $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Diagram tejto kategórie bude potom vyzeráť nasledovne:



Ďalšie príklady kategórií:

- **Pos** je kategória usporiadaných množín
- **Rel** je kategória, kde objektami sú množiny a morfizmy sú binárne relácie
- **Vect** je kategória vektorových priestorov a lineárnych zobrazení medzi nimi
- Ďalšie príklady, napr. z oblasti matematickej logiky: kategória, ktorej objektami sú formuly a morfizmami sú dôkazy

- je možné ešte väčšie zjednodušenie resp. abstrakcia?
- je možné vynechať objekty a uvažovať len morfizmy?
- takýto bezobjektový prístup by mohol byť zaujímavý nie len pre svoju jednoduchosť (redukciu na základné vzťahy), ale aj pre svoje potenciálne uplatnenie v teoretickej informatike a logike

- Analyzovať a formálne definovať kategórie bez objektov
- Aplikovať bezobjektové kategórie na konkrétne matematické štruktúry

- Adámek J. *Matematické struktury a kategorie*, SNTL, Praha, 1982.
- Adámek J., Herrlich H., Strecker G. *Abstract and concrete categories: The joy of cats*, John Wiley and Sons, New York, 1990.
- Lawvere F. W., Schanuel S. H. *Conceptual Mathematics (A first introduction to categories)*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- Valentinyová, N. *Teória kategórií v príkladoch*. Diplomová práca. ÚI PF UPJŠ, 2016.

Ďakujem za pozornosť! :)